**Лабораторная работа №7 «Применение метода стрельбы для решения линейной**

**краевой задачи»**

**Цель работы:** научиться применять метод стрельбы для решения линейной краевой задачи

**Краткая теория Пример краевой задачи**

Примером двухточечной краевой задачи является задача:

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image001.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image002.gif

(8.1)

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image003.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image004.gifс граничными условиями на обоих концах отрезка http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image005.gif на котором надо найти

решение http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image006.gif На этом примере мы схематически изложим некоторые способы численного решения краевых задач.

Если функция http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image007.gif в (8.1) линейна по аргументам *у* и http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image008.gif то мы имеем линейную краевую задачу, иначе — нелинейную краевую задачу.

**Линейная краевая задача**

Рассмотрим частную, но довольно распространенную краевую задачу следующего вида:

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image009.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image010.gif

(8.2)

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image003.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image004.gifДля этой задачи проиллюстрируем два способа решения: один основан на идее численного построения общего решения линейного дифференциального уравнения, другой (конечно- разностный) сводит исходную дифференциальную краевую задачу к системе линейных алгебраических уравнений, решение которой находится методом прогонки.

**Метод численного построения общего решения**

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image011.gifДля нахождения решения краевой задачи (8.2) можно численно построить решение дифференциального уравнения, представимое в виде

где http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image012.gif — какое-либо решение неоднородного уравнения

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image013.gif

а http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image014.gif и http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image015.gif — два любые линейно независимые решения однородного уравнения http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image016.gif Постоянные http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image017.gif и http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image018.gif находятся из граничных условий задачи (8.2).

Так как решения http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image019.gif http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image020.gif http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image015.gif произвольны, то их можно построить различными способами. Например, можно задать какие-то начальные условия и решить одну задачу Коши для неоднородного и две задачи Коши для однородного уравнений. Эти условия, в частности, могут быть такими:

* http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image021.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image022.gifдля неоднородного уравнения;

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image023.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image024.gif

* для однородного уравнения.

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image025.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image026.gifОднако при реализации этого способа, например, в случае http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image027.gif для рассматриваемого уравнения могут возникнуть трудности, связанные с неустойчивостью задачи Коши. В этом

случае можно попытаться построить http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image019.gif http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image020.gif http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image015.gif с помощью решения одной краевой задачи для неоднородного уравнения и двух краевых задач для однородного уравнения. Краевые условия для этих задач могут быть, например, следующими:

* http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image021.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image028.gifдля неоднородного уравнения;

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image023.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image029.gif

* для однородного уравнения.

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image025.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image030.gifЭти задачи могут быть решены методом прогонки. Условия устойчивости метода прогонки

при http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image031.gif как легко проверить, выполнены. Этот подход может оказаться полезным, если краевые условия таковы, что для исходной задачи (8.2) метод прогонки применен быть не может.

Отметим, что с учетом специфики краевых условий исходной задачи можно строить общее решение вида

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image032.gif

где http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image012.gif — некоторое решение неоднородного уравнения, а http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image014.gif — некоторое решение однородного уравнения.

**Конечно-разностный метод (метод прогонки)**

При нахождении решения линейной краевой задачи:

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image033.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image010.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image003.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image004.gif

для http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image027.gif методом построения общего решения, если оно находится с помощью решения задач Коши, могут возникнуть трудности, связанные с вычислительной неустойчивостью задачи Коши.

Для решения поставленной задачи можно воспользоваться разностной схемой:

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image034.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image035.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image036.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image037.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image038.gif

и решить разностную задачу методом прогонки. Условия применимости метода прогонки

при http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image031.gif как легко проверить, выполнены. Подробнее о методе прогонки см. в [1–4, 17, 31]. В

[17] рассмотрены различные варианты метода прогонки.

**Нелинейная краевая задача**

Краевая задача

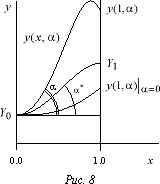
http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image001.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image010.gif

(8.3)

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image039.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image004.gifявляется нелинейной краевой задачей, если функция http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image007.gif нелинейна хотя бы по одному из аргументов *y* или http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image040.gif

В настоящей работе реализованы два способа решения нелинейных краевых задач: *метод*

*стрельбы* и *метод линеаризации* (метод Ньютона), который сводит решение нелинейной краевой задачи к решению серии линейных краевых задач.

**2.6. Метод стрельбы**

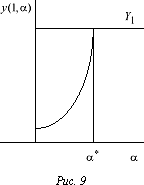
http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image039.gifМетод стрельбы для решения краевой задачи (8.3) базируется на том, что имеются удобные способы численного решения задачи Коши, т. е. задачи следующего вида

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image001.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image010.gif

(8.4)

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image042.gif

где http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image043.gif — ордината точки http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image044.gif из которой выходит интегральная кривая; — угол наклона интегральной кривой к

оси *x* при выходе из точки http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image045.gif (рис. 8). При фиксированном http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image043.gif решение задачи (8.4) имеет вид http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image046.gif При http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image047.gif решение http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image048.gif зависит только от



:

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image049.gif

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image050.gifИспользуя указанное замечание о решении задачи Коши (8.4), можно задачу (8.3) переформулировать следующим образом:

найти такой угол при котором интегральная кривая,



к

выходящая из точки http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image051.gif под углом точку http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image052.gif

оси абсцисс, попадет в

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image053.gif

(8.5)

Решение задачи (8.4) при этом http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image055.gif совпадает с искомым

решением задачи (8.3). Таким образом, дело сводится к решению

уравнения (8.5) (рис. 9). Уравнение (8.5) — это уравнение вида

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image056.gif

где http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image057.gif

Оно отличается от привычных уравнений лишь тем, что функция http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image058.gif задана не аналитическим выражением, а с помощью алгоритма численного решения задачи (8.4).

Для решения уравнения (8.5) можно использовать любой метод, пригодный для уточнения корней нелинейного уравнения, например, метод деления отрезка пополам, метод Ньютона (касательных) и др. Метод Ньютона здесь предпочтительнее (если имеется достаточно хорошее начальное приближение) из-за высокой стоимости вычисления одного значения функции *F*( ) (нужно решить задачу Коши (8.4) с данным



).

Метод стрельбы, сводящий решение краевой задачи (8.3) к вычислению решений задачи

Коши (8.4), хорошо работает в том случае, если решение http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image059.gif «не слишком сильно» зависит от . В противном случае он становится вычислительно неустойчивым, даже если решение задачи (8.3) зависит от входных данных «умеренно».

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image064.gifПри решении уравнений http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image056.gif методом деления отрезка пополам, мы задаем http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image060.gif и http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image061.gif так, чтобы разности http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image062.gif и http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image063.gif имели разные знаки. Затем полагаем

Вычисляем http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image065.gif Затем вычисляем http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image066.gif по одной из формул:

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image067.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image068.gifили

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image071.gifв зависимости от того, имеют ли разности http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image069.gif и http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image063.gif соответственно разные или одинаковые знаки. Затем вычисляем http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image070.gif Процесс продолжаем до тех пор, пока не будет

достигнута требуемая точность

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image075.gifВ случае использования для решения уравнения http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image072.gif метода Ньютона задаем http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image073.gif а затем последующие http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image074.gif вычисляем по рекуррентной формуле

*n* = 0, 1, …

Производная http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image076.gif может быть вычислена по одной из формул численного дифференцирования, например, первого порядка аппроксимации:

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image077.gif

**Вычислительная неустойчивость задачи Коши**

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image078.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image079.gifПоясним причину возникновения вычислительной неустойчивости на примере следующей линейной краевой задачи:

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image080.gif http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image081.gif

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image082.gifпри постоянном Выпишем решение этой задачи:

(8.6)

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image083.gif

Коэффициенты при http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image043.gif и http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image084.gif с ростом *р* остаются ограниченными на отрезке http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image085.gif функциями; при всех http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image086.gif они не превосходят единицу. Поэтому небольшие ошибки при

задании http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image043.gif и http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image087.gif ведут к столь же небольшим погрешностям в решении, т. е. краевая задача является «хорошей».

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image088.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image010.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image003.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image089.gifРассмотрим теперь задачу Коши:

(8.7)

Ее решение имеет вид:

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image090.gif

Если при задании http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image091.gif допущена погрешность , то значение решения при http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image047.gif получит приращение

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image092.gif(8.8)

При больших *р* вычитаемое в равенстве (8.8) пренебрежимо мало, но коэффициент в

первом слагаемом http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image093.gif становится большим. Поэтому метод стрельбы при решении задачи (8.6), будучи формально приемлемой процедурой, при больших р становится практически непригодным. Подробнее о возникновении неустойчивостей см. [1, 2].

**Метод линеаризации (метод Ньютона)**

Метод Ньютона сводит решение нелинейной краевой задачи к решению серии линейных краевых задач и состоит в следующем.

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image095.gifПусть для нелинейной краевой задачи (8.3) известна функция http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image019.gif удовлетворяющая граничным условиям и грубо приближенно равная искомому http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image094.gif Положим

(8.9)

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image101.gifгде http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image096.gif — поправка к нулевому приближению http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image097.gif Подставим (8.9) в уравнение (8.8) и линеаризуем задачу, используя следующие равенства:

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image098.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image099.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image100.gif

Отбрасывая остаточный член получим линейную краевую задачу для нахождения поправки http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image102.gif

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image103.gif

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image104.gif http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image105.gif

где

(8.10)

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image106.gif http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image107.gif

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image108.gif

Решая линейную краевую задачу (8.10) каким-либо численным методом, найдем поправку http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image109.gif и примем за первое приближение

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image110.gif

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image112.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image113.gifАналогично, зная приближение http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image020.gif положим http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image111.gif и найдем следующее приближение. Продолжая процесс до тех пор, пока не будут выполнены неравенства

задачи.

где — требуемая точность, найдем приближенное решение исходной нелинейной

**Библиографическая справка**

Более детальную теоретическую справку о методах решения краевых задач можно получить,

используя книги [1–4, 7, 27, 32]. Подробнее о различных вариантах метода прогонки см. в [17].

**Задание**

1. Начните выполнение работы с темы «*Линейная краевая задача*». Выбрав с помощью меню один из методов решения линейной краевой задачи, перейдите к пункту меню

«*Параметры*». Наберите следующую краевую задачу:

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image114.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image010.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image115.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image116.gif

для http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image117.gif Решением этой задачи является функция http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image118.gif Установите значение шага сетки *h* = 0,05.

* 1. Найдите решение этой задачи методом построения общего решения и методом прогонки для разных *р*, начиная с умеренных значений и увеличивая их до величины порядка 1200. Сравните получаемые решения с точным и объясните наблюдаемые эффекты. Попытайтесь найти решение этой же задачи методом стрельбы. Проанализируйте, как влияет при разных *р* точность задания недостающего начального условия на левом конце интервала на успешное решение задачи методом стрельбы.
  2. Объясните полученные результаты. Замените левое краевое условие (положите,

например, http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image119.gif и посмотрите, как изменится характер решения.

* 1. Выполните п. 1.1, 1.2 для задачи:

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image120.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image010.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image121.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image122.gif

Eе точное решение http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image118.gif Объясните полученные результаты. Найдите условие устойчивости метода прогонки для данной задачи.

1. Получите численное решение следующих нелинейных краевых задач: 2.1. http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image123.gif http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image010.gif

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image124.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image125.gif*p* = 1, 4, 7, 25, 50, 100;

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image126.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image010.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image130.gif2.2.

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image127.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image125.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image128.gif

2.3. http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image129.gif

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image131.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image132.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image133.gif

1. Рассмотрите следующие краевые задачи:

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image135.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image136.gif3.1. http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image134.gif http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image010.gif

3.2. http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image137.gif http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image138.gif

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image135.gif http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image139.gif

Параметр *a* меняется от 0 до 2. Что при этом происходит с решением задач? Почему в задаче 3.2 при значениях *a* > 1,4999… не работает метод линеаризации?

Замечание. Задача 3 подробно рассмотрена в [29].

1. http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image140.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image141.gifhttp://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image142.gifРассмотреть две сингулярно-возмущенные задачи (с малым параметром при старших производных):

и

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image143.gif http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image141.gif

http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image144.gif

Считаем http://crecs.ru/ru/numlabs2/ODEBVP_files/image145.gif Какие численные методы позволят получить решение каждой из этих задач? Почему?